Beweis 1: Die Zahlenmengen

Beweis 1.1: Division durch Null

Annahme: Man kann die reellen Zahlen so erweitern, daß die Division nur noch für $0^2 := 0 * 0 =: 0(0)$ nicht möglich ist.

Definitionen:

(Def1): $0 := \{ 0(r) \mid 0(r) := r * 0 \mid R(alt) \ni r , 0\}$

(Def2): $R(Z) := \{ r(s) \mid r(s) := r + s * 0 \mid (R(alt)\backslash 0) \ni r ; R(alt) \ni s , 0\}$

(Def3): $\infty := \{ \infty(r) \mid \infty(r) := r * \infty \mid (R(alt) \setminus \{0\}) \ni r\}$

(Def4) $e(+) := 0(0) := 0 * 0$

(Def5): $R(neu) := 0 \cup R(Z) \cup \infty$

(Def6): $R(neu*) := 0 \cup R(Z)$

(Def7): $r * 0 * 0 =: 0(0)$

(Def8): $r - r =: 0(0)$ für $R(alt) \ni r , r = r$

(Def9): $e(*) := 1(0(0)) :=[(Def2)]\ 1 + 0 * 0$

(Def10): $r * \infty * \infty =: \infty(\infty)$

(Def11): $\infty(r) =: 1(0(0))/0(r)$

(Def12): $r * \infty + s = r * \infty :\Leftrightarrow s \ni 0 \vee s \ni R(Z)$

(Def13): $0(+) := \{ 0(r) \mid 0(r) := r * 0 \mid R(alt) \ni r , 0 \mid r > 0\}$

(Def14): $R(Z+) := \{ r(s) \mid r(s) := r + s * 0 \mid R(alt) \ni r , s , 0 \mid r > 0\}$

(Def15): $\infty(+) := \{ \infty(r) \mid \infty(r) := r * \infty \mid R(alt) \ni r , \infty \mid r > 0\}$

(Def16): $R(+) := 0(+) \cup R(Z+) \cup \infty(+)$

Axiome:

(1): $r + s = s + r$

(2): $(r + s) + t = r + (s + t)$

(3): $r + e(+) = r \wedge R \ni e(+)$

(4): $r + (-r) = e(+) \wedge R \ni -r$

(5): $r * s = s * r$

(6): $(r * s) * t = r * (s * t)$

(7): $r * e(*) = r \wedge R \ni e(*)$

(8): $r * 1/r = e(*) \wedge R \ni 1/r$

(9): $r * (s + t) = r * s + r * t$

(10): $r = e(+) \vee R(+) \ni r \vee R(+) \ni -r$

(11): $R(+) \ni r , s \Rightarrow R(+) \ni t := r + s$

(12): $R(+) \ni r , s \Rightarrow R(+) \ni t := r * s$

(13): $M \subset R(neu), m(max.) >= m$

Relation:
g: gilt für

Wichtig:

0(r) – Null mit dem Index r
r(s) – r mit dem Index s
∞(r) – Unendlich mit dem Index r

Ausdrücke, die einen unterschiedlichen Index haben, sind unterschiedliche Zahlen.
Bsp. 0(1) ist eine andere Zahl als 0(2)

a) 0(Z): Zahl Null, 0(M): Menge Null (Funktion Null)

0(Z)
=[(7) g R(neu)] 1 * 0(Z)
=:[(Def1)] 0(1)
<> 0(r)   (für r <> 1)
:= r * 0 := 0(M)
⇔ r * 0 := 0(M) <> 0(Z)   (für r <> 1)

b) r * 0 := 0 und r * ∞ := ∞ folgen nicht aus den alten Axiomen

r * 0 := 0 ⇒ (7) (g nicht) {0}
(7) (g nicht) {0} (⇒ nicht) r * 0 := 0
r * 0 := 0 (⇔ nicht) (7) (g nicht) {0}
(1 * 0 := 0 ∧ 2 * 0 := 0 ∧ 3 * 0 :<> 0) ⇒ (7) (g nicht) {0}

r * ∞ := ∞ ⇒ (7) (g nicht) {+∞ , -∞}
(7) (g nicht) {+∞ , -∞} (⇒ nicht) r * ∞ := ∞
r * ∞ := ∞ (⇔ nicht) (7) (g nicht) {+∞ , -∞}
(1 * ∞ := ∞ ∧ 2 * ∞ := ∞ ∧ 3 * ∞ :<> ∞) ⇒ (7) (g nicht) {∞ , -∞}

(Die alten Definitionen r * 0 := 0 und r * ∞ := ∞ folgen nicht aus dem 7. Axiom. Sie folgen bei entsprechender Definition der Multiplikation mit Null auch nicht aus dem 3. Axiom: +1 * = + <> Das neutrale Element der Addition ist eine Zahl ohne Vorzeichen. Multipliziert man es mit einer positiven Zahl, erhält man eine positive Zahl aus der Umgebung U des neutralen Elements als Ergebnis, also nicht das neutrale Element selbst. Die alten Definitionen r * 0 := 0 und r * ∞ := ∞ sind rein willkürlich und folgen nicht aus den alten Axiomen.)

c) r * s = s * r ; R(alt) ∍ r, s ; s = 0
r * s
r * 0
:=
0

=:
0 * r
s * r

(5) g R(alt)
:= x =: ist bisher erlaubt

d) Annahme 1 * 0 = r * 0 falsch

1 * 0(Z) = r * 0(Z)
⇔: R = {1} Widerspruch Def. R

f(r) = 1 * 0
g(r) = r * 0

D := R(alt) , W:= R(alt)
f(r) = g(r)

D := R(alt) , W:= R(neu)
f(r) <> g(r) für r <> 1

Wenn man diese beiden Funktionen gleichsetzt, darf man die neuen Definitionen nicht mehr anwenden.

e) Rechenregeln

a) 0(r) + 0(s) = 0(r + s)
b) 0(r) * 0(s) = 0(0)
c) 0(r) + s(t) = s(t + r)
d) 0(r) * s(t) = 0(r * s)
e) 0(r) + ∞(s) = ∞(s)
f) 0(r) * ∞(s) = [r * s](0)
g) r(t) + s(v) = [r + s](t + v)
h) r(t) * s(v) = [r * s](r * v + s * t)
i) ∞(r) + s(t) = ∞(r)
j) ∞(r) * s(t) = ∞(r * s)
k) ∞(r) + ∞(s) = ∞(r + s)
l) ∞(r) * ∞(s) = ∞(∞)

a) 0(r) + 0(s) := r * 0 + s * 0 =[(9) g R(alt)] (r + s) * 0
:= 0(r + s)

b) 0(r) * 0(s) := r * 0 * s * 0 =[(5) g R(alt)] r * s * 0 * 0
:=[(Def7)]
0(0)

c) 0(r) + s(t) = r * 0 + s + t * 0 =[(1) , (9) g R(alt)] s + (r + t) * 0
=: s(r + t)

d) 0(r) * s(t) := r * 0 * (s + t * 0) =[(9), (5) g R(alt)] r * s * 0 + r * t * 0 * 0 =[(3) g R(alt)] r * s * 0
=: 0(r * s)

e) 0(r) + ∞(s) := r * 0 + s * ∞
=:[(Def12)]
∞(s)

f) 0(r) * ∞(s) := r * 0 * s * ∞
=:[(Def11)]
[r * s](0)

g) r(t) + s(v) := r + t * 0 + s + u * 0 =[(1) g R(alt)]
r + s + t * 0 + u * 0 =[(9) g R(alt)] r + s + (t + u) * 0
=: [r + s](0(t + u))

h)r(t)*s(u):= (r + t * 0) * (s + u * 0) = r * s + r * u * 0 + s* t * 0 + t * u * 0 * 0 = r * s + (r * u + s * t) * 0 + 0 * 0 := (r * s)(0(r * u + s * t))

i) ∞(r) + s(t) := r * ∞ + s + t * 0
=[(Def12)]
∞(r)

j) ∞(r) * s(t) := r * ∞ * (s + t *0) = r * s * ∞ + r * t
=:[(Def12)]
∞(r * s)

k) ∞(r) + ∞(s) := r * ∞ + s * ∞ =[(9) g R(alt)] (r + s) * ∞
=: ∞(r + s)

l) ∞(r) * ∞(s) := r * s * ∞ * ∞
=:[(Def10)]
∞(∞)

(1) r + s = s + r

a) 0 ∋ r , s

0(r) + 0(s)
:=[(Def1)] r * 0 + s * 0
=[(9) g R(alt)] (r + s) * 0
=[(1) g R(alt)] (s + r) * 0
=[(9) g R(alt)] s * 0 + r * 0
=:[(Def1)]
0(s) + 0(r)

b) 0 ∋ r ∧ R(Z) ∋ s

0(r) + s(t)
:=[(Def1) ∧ (Def2)] r * 0 + s + t * 0
=[(1) g R(alt)] s + t * 0 + r * 0
=:[(Def1) ∧ (Def2)]
s(t) + 0(r)

c) 0 ∋ r ∧ ∞ ∋ s

0(r) + ∞(s)
:=[(Def1) ∧ (Def3)] r * 0 + s * ∞
=:[(Def12)]
s * ∞
:=[(Def12)] s * ∞ + r * 0
=: [(Def1) ∧ (Def3)]
∞(s) + 0(r)

d) R(Z) ∋ r , s

r(t) + s(u)
:=[(Def2)] r + t * 0 + s + u * 0
=[(1) g R(alt)] s + u * 0 + r + t * 0
=:[(Def2)]
s(u) + r(u)

e) R(Z) ∋ r ∧ ∞ ∋ s

r(t) + ∞(s)
:=[(Def2) ∧ (Def3)] r + t * 0 + s*∞
=:[(Def12)] s*∞
:=[(Def12)] s*∞ + r + t * 0
=: [(Def2) ∧ (Def3)]
∞(s) + r(t)

f) ∞ ∍ r , s

∞(r) + ∞(s)
:=[(Def3)] r * ∞ + s * ∞
=[(9) g R(alt)] (r + s) * ∞
=[(1) g R(alt)] (s + r) * ∞
=[(9) g R(alt)] s * ∞ + r * ∞
=:[(Def3)]
∞(s) + ∞(r)

Zwischenergebnis: (1) g R(neu)

(2) (r + s) + t = r + (s + t) ∧ R(neu) ∍ r, s, t

(2) g R(alt)

(r + s) + ∞
=:
∞
:=
r + (s + ∞)

(r + ∞) + ∞
=:
∞
:=
r + (∞ + ∞)

(∞ + ∞) + ∞
=:
∞
:=
∞ + (∞ + ∞)

a) 0 ∍ r , s , t

(0(r) + 0(s)) + 0(t)
:=[(Def1)] (r * 0 + s * 0) + t * 0
=[(2) g R(alt)] r * 0 + (s * 0 + t * 0)
=:[(Def1)]
0(r) + (0(s) + 0(t))

b) 0 ∍ r , s ∧ R(Z) ∍ t

(0(r) + 0(s)) + t(u)
:=[(Def1) ∧ (Def2)] (r * 0 + s * 0) + t + u * 0
=[(2) g R(alt)] r * 0 + (s * 0 + t + u * 0)

=:[(Def1) ∧ (Def2)]
0(r) + (0(s) +t(u))

c) 0 ∋ r ∧ R(Z) ∋ s , t

(0(r) +s(u)) + t(v)
:=[(Def1) ∧ (Def2)] (r * 0 + s + u * 0) + t + v * 0
=[(2) g R(alt)] r * 0 + (s + u * 0 + t + v * 0)
=:[(Def1) ∧ (Def2)]
0(r) + (s(u)+ t(v))

d) 0 ∋ r, s ∧ ∞ ∋ t

(0(r) + 0(s)) + ∞(t)
:=[(Def1) ∧ (Def2)] (r * 0 + s * 0) + t * ∞
=:[(Def12)] t * ∞
:=[(Def12)] r * 0 + (s * 0 + t * ∞)
=:[(Def1) ∧ (Def2)]
0(r) + (0(s) + ∞(t))

e) 0 ∋ r ∧ ∞ ∋ s, t

(0(r) + ∞ (s)) + ∞(t)
:=[(Def1) ∧ (Def2)] (r * 0 + s * ∞) + t * ∞
=:[(Def12)] s * ∞ + t * ∞
:=[(Def12)] r * 0 + (s * ∞ + t * ∞)
=:[(Def1) ∧ (Def2)]
0(r) + (∞(s) + ∞(t))

f) R(Z) ∋ r , s , t

(r(u)+s(v)) + t(w)
:=[(Def2)] (r + u * 0 + s + v * 0) + t + w * 0
=[(2) g R(alt)] r + u * 0 + (s + v * 0 + t + w * 0)
=:[(Def2)]
r(u) + (s(v)+t(w))

g) R(Z) ∋ r, s ∧ ∞ ∋ t

(r(u)+s(v)) + ∞(t)
:=[(Def2)] (r + u * 0 + s + v * 0) + t * ∞
=[(2) g R(alt)] r + u * 0 + (s + v * 0 + t * ∞)
=:[(Def2)]
r(u) + (s(v)+ ∞(t))

h) R(Z) ∋ r ∧ ∞ ∋ s , t

(r(u)+ ∞(s)) + ∞(t)

:=[(Def2)] (r + u * 0 + s * ∞) + t * ∞
=[(2) g R(alt)] r + u * 0 + (s * ∞ + t * ∞)
=:[(Def2)]
r(u) + (∞(s) + ∞(t))

i) ∞ ∋ r, s, t

(∞(r) + ∞(s)) + ∞(t)
:=[(Def2)] (r * ∞ + s * ∞) + t * ∞
=[(2) g R(alt)] r * ∞ + (s * ∞ + t * ∞)
=:[(Def2)]
∞(r) + (∞(s) + ∞(t))

Zusatz: (1) g R(neu) ⇒ (r + s) = (s + r), (s + t) = (t + s), (r + t) = (t + r) ⇒ j) – ä) erfüllt

Zwischenergebnis: (2) g R(neu)

(3) r + e(+) = r ∧ (R(neu) \ ∞) ∋ r ∧ R(neu) ∋ e(+)

a) 0 ∋ r

0(r) + e(+)
=[(Def1) ∧ (Def4)] 0(r) + 0(0)
=[(Def1)] r * 0 + 0 * 0
=[(9) g R(alt)] (r + 0) * 0
=[(3) g R(alt) \ {+∞ , -∞}] r * 0
=:[(Def1)]
0(r)

b) R(Z) ∋ r

r(t) + e(+)
=[(Def1) ∧ (Def4)]r(t)+ 0(0)
=[(Def1)] r + t * 0 + 0 * 0
=[(1) g R(alt)] r + 0 * 0 + t * 0
=[(Def8)] r + t * 0
=:[(Def1)]
r(t)

c) ∞ ∋ r

[(3) g R(alt) \ {+∞ , -∞}] , [(3) g R(neu) \ ∞]

d) (R(neu)) ϶ e(+)

e(+)
:=[Def4)] 0(0)
[Def1] 0 **:϶**
[(Def5)]
(R(neu)) **:϶**

Zwischenergebnis: (3) g (R(neu) \ ∞)

(4) r + (-r) = e(+) ∧ R ϶ -r

a) 0 ϶ r , -r

0(r) + 0(-r)
:=[(Def1)] r * 0 + (-r) * 0
:=[(9) g R(alt)] (r – r) * 0
:=[(Def8)] 0 * 0 * 0
:=[(Def7)] 0 * 0
=:[(Def4)]
e(+)

0(-r)
[(Def1)]
0 ϶

b) R(Z) ϶ r , -r ∧ R(alt) ϶ s

r(t) + (-r(0(-t)))
:=[(Def2)] r + t * 0 -r –t * 0
=[(1) g R(alt)] r – r + t * 0 – t * 0
=[(9) g R(alt)] r – r + (t – t) * 0
=:[(Def8)] 0 * 0 + 0 * 0 * 0
:=[(Def7)] 0 * 0 + 0 * 0
=:[(3) g R(neu) \ ∞] 0 * 0
=:[(Def4)]
e(+)

-r(0(-t))
[(Def2)]
R(Z) ϶

c) ∞ ϶ r , -r

[(4) g R(alt) \ {+∞ , -∞}] , [(4) g (R(neu) \ ∞)]

Zwischenergebnis: (4) g (R(neu) \ ∞)

(5) r * s = s * r

a) 0 ∍ r , s

0(r) * 0(s)
:=[(Def1)] r * 0 * s * 0
=[((5) g R(alt)] r * s * 0 * 0
=:[(Def7)]
0*0
:=[(Def7)] (s * r) * 0 * 0
=[((5) g R(alt)] s * 0 * r * 0
=:[Def1]
0(s) * 0(r)

b) 0 ∍ r ∧ R(Z) ∍ s

0(r) * s(t)
:=[(Def1) ∧ (Def2)] r * 0 * (s + t * 0)
=[(1) g R(alt)] s + t * 0 + r * 0
=:[(Def1) ∧ (Def2)]
s(t) + 0(r)

c) 0 ∍ r ∧ ∞ ∍ s

0(r) * ∞(s)
:=[(Def1) ∧ (Def3)] r * 0 * s * ∞
=[(5) g R(alt)] 0 * ∞ * r * s
=:[(Def11)] 1 * r * s
=[(7) g R(alt)] r * s
=[(5) g R(alt)] s * r
=[(7) g R(alt)] 1 * s * r
:=[(Def11)] 0 * ∞ * s * r
=[(5) g R(alt)] s * ∞ + r * 0
=:[(Def1) ∧ (Def3)]
∞(s) * 0(r)

d) R(Z) ∍ r , s

r(t) * s(u)
:=[(Def2)] (r + t * 0) * (s + u * 0)
=[(5) g R(alt)] (s + u * 0) * (r + t * 0)
=:[(Def2)]
s(u) * r(u)

e) R(Z) ∍ r ∧ ∞ ∍ s

r(t) * ∞(s)
:=[(Def2) ∧ (Def3)] (r + t * 0) * s * ∞

=[(9) g R(alt)] (r * s + t * 0 * s) * ∞
=[(5) g R(alt)] ∞ * (s * r + s * t * 0)
=[(9) g R(alt)] ∞ * s * (r + t * 0)
=[(5) g R(alt)] s * ∞ * (r + t * 0)
=:[(Def2) ∧ (Def3)]
∞(s) * r(t)

f) ∞ ∋ r , s

∞(r) * ∞(s)
:=[(Def3)] r * ∞ * s * ∞
=[(5) g R(alt)] s * ∞ + r * ∞
=:[(Def3)]
∞(s) * ∞(r)

Zwischenergebnis: (5) g R(neu)

(6) (r * s) * t = r * (s * t) ∧ R(neu) ∋ r, s, t

a) 0 ∋ r , s , t

(0(r) * 0(s)) * 0(t)
:=[(Def1)] (r * 0 * s * 0) * t * 0
=[(6) g R(alt)] r * 0 * (s * 0 * t * 0)
=:[(Def1)]
0(r) * (0(s) * 0(t))

b) 0 ∋ r , s ∧ R(Z) ∋ t

(0(r) * 0(s)) * t(u)
:=[(Def1) ∧ (Def2)] (r * 0 * s * 0) * (t + u * 0)
=[(6) g R(alt)] r * 0 * ((s * 0) * (t + u * 0))
=:[(Def1) ∧ (Def2)]
0(r) * (0(s) *t(u))

c) 0 ∋ r ∧ R(Z) ∋ s , t

(0(r) *s(u)) * t(v)
:=[(Def1) ∧ (Def2)] ((r * 0) * (s + u * 0)) * (t + v * 0)
=[(6) g R(alt)] r * 0 * ((s + u * 0) * (t + v * 0))
=:[(Def1) ∧ (Def2)]
0(r) * (s(u)* t(v))

d) 0 ∋ r, s ∧ ∞ ∋ t

(0(r) * 0(s)) * ∞(t)
:=[(Def1) ∧ (Def3)] (r * 0 * s * 0) * t * ∞

=[(6) g R(alt)] r * 0 * (s * 0 * t * ∞)
=:[(Def1) ∧ (Def3)]
0(r) * (0(s) * ∞(t))

e) 0 ∍ r ∧ ∞ ∍ s, t

(0(r) * ∞(s)) * ∞(t)
:=[(Def1) ∧ (Def3)] (r * 0 * s * ∞) * t * ∞
=[(6) g R(alt)] r * 0 * (s * ∞ * t * ∞)
=:[(Def1) ∧ (Def3)]
0(r) * (∞(s) * ∞(t))

f) R(Z) ∍ r , s , t

(r(u)*s(v)) * t(w)
:=[(Def2)] ((r + u * 0) * (s + v * 0)) * (t + w * 0)
=[(6) g R(alt)] (r + u * 0) * ((s + v * 0) * (t + w * 0))
=:[(Def2)]
r(0(u) * (s(v)*t(w))

g) R(Z) ∍ r, s ∧ ∞ ∍ t

(r(u)*s(v)) * ∞(t)
:=[(Def2) ∧ (Def3)] ((r + u * 0) * (s + v * 0)) * t * ∞
:=
∞
=:(r + u * 0) * ((s + v * 0) * t * ∞)
=:[(Def2) ∧ (Def3)]
r(u) * (s(v) * ∞(t))

h) R(Z) ∍ r ∧ ∞ ∍ s , t

(r(0(u) * ∞(s)) * ∞(t)
:=[(Def2) ∧ (Def3)] (r + u * 0) * s * ∞ * t * ∞
:=
∞
=:(r + u * 0) * (s * ∞ * t * ∞)
=:[(Def2) ∧ (Def3)]
r(u) * (∞(s) * ∞(t))

i) ∞ ∍ r, s, t
(∞(r)* ∞(s)) * ∞(t)
´:=[(Def3)] (r * ∞ * s * ∞) * t * ∞
:=
∞
=:
r * ∞ * (s * ∞ * t * ∞)

=:[(Def3)]
∞(r) * (∞(s)* ∞(t))

Zusatz: (5) g R(neu) ⇒ [(r * s) = (s * r) ∧ (s * t) = (t * s) ∧ (r * t) = (t * r)] ⇒ j) - ä) erfüllt

Zwischenergebnis: (6) g R(neu)

(7): r * e(*) = r ∧ R ∍ e(*)

a) 0 ∍ r

0(r) * e(*)
:= [(Def1) ∧ (Def9)] r * 0 * (1 + 0 * 0)
=[(9) g R(alt)] r * (1 * 0 + 0 * 0 * 0)
=:[(Def7)] r * (1 * 0 + 0 * 0)
=:[(3) g R(neu)] r * (1 * 0)
=[(6) g R(alt)] (r * 1) * 0
=[(7) g R(alt)] r * 0
:=[(Def1)]
0(r)

Bsp.: 2 * 0(r) :=[(Def1)] 2 * r * 0 =:[(Def1)] 0(2r) <> 0(r) für r <> 0

b) R(Z) ∍ r

(r(s)) * e(*)
:=[(Def2) ∧ (Def9)] (r + s * 0) * (1 + 0 * 0)
=[(9) g R(alt)] r * 1 + 1 * s * 0 + r * 0 * 0 + s * 0 * 0 * 0
=:[(Def7)] r * 1 + 1 * s * 0 + 0 * 0 + 0 * 0
=[(3) g R(neu)] r * 1 + 1 * s * 0
=[(7) g R(alt)] r + s * 0
=:[(Def2)]
r(s)

c) ∞ ∍ r

∞(r) * e(*)
:=[(Def3) ∧ (Def9)] r * ∞ * (1 + 0 * 0)
=[(9) g R(alt)] r * ∞ + r * ∞ * 0 * 0
=:[(Def11)] r * ∞ + r * 1 * 0
=:[(Def12)]
r * ∞
=:[(Def3)]
∞(r)

d) (R(neu)) ϶ e(*)

e(*)
:=[Def9)] 1(0(0))
[Def2] R(Z) :϶
[(Def5)]
(R(neu)) :϶

Zwischenergebnis: (7) g R(neu) \ {0(0)}

(8): r * 1/r = e(*) ∧ R(neu) ϶ 1/r

a) (0 \ {0(0)}) ϶ r

0(r) * ∞(1 / r)
:=[(Def11)] [r * (1/r)] (0(0))
=[(8) g (R(alt) \ (0 ∪ ∞))]
1(0(0))

(1 / r) * ∞
[(8) g (R(alt) \ 0) ∧ (Def3)]
R(neu) ϶:

b) R(Z) ϶ r

r(s) * [1 / r](0(s / -(r * r)))
:=[(Def2)](r + 0(s)) * ((1/r) + (s / -(r * r)) * 0)
=[(9) g R(alt) ∧ (Def7)] r * (1/r) – (s/r) * 0 + (s/r) * 0 + 0 * 0
=[(8) g R(alt) \ (0 ∪ ∞)] 1 - (s/r) * 0 + (s/r) * 0 + 0 * 0
=[(4) g (R(neu) \ ∞)] 1 + 0 * 0 + 0 * 0
=:[(Def1) ∧ (Def2)] 1(0(0)) + 0(0)
=[(3) g (R(neu) \ ∞)]
1(0(0))

(1 / r) + (s / -(r * r)) * 0
[(8) g (R(alt) \ (0 ∪ ∞)) ∧ (12) g R(alt) ∧ (Def3)]
R(neu) ϶:

c) ∞ ϶ r

∞(r) * 0(1/r)
:=[(Def1) ∧ (Def3)] r * ∞ * 1/r * 0
=[(5) g R(alt)] r * 0 * 1/r * ∞
=:[(Def1) ∧ (Def3)] 0(r) * ∞(1/r)
:=[(Def11)]
1(0(0))

(1 / r) * 0
[(8) g (R(alt) \ (0 ∪ ∞)) ∧ (Def1)]
R(neu) ∍:

Zwischenergebnis: (8) g R(neu) \ {0(0), ∞(∞)}

(9): r * (s + t) = r * s + r * t

a) 0 ∍ r , s , t

0(r) * (0(s)) + 0(t))
:=[(Def1)] r * 0 * (s * 0 + t * 0)
=[(9) g R(alt)] r * 0 * s * 0 + r * 0 * t * 0
=:[(Def1)]
0(r) * 0(s) + 0(r) * 0(t)

b) 0 ∍ r , s ∧ R(Z) ∍ t

0(r) * (0(s) + t(u)
:=[(Def1) ∧ (Def2)] r * 0 * (s * 0 + t + u * 0)
=[(9) g R(alt)] r * 0 * s * 0 * r * 0 * (t + u * 0)
=:[(Def1) ∧ (Def2)]
0(r) * 0(s) + 0(r) *t(u)

c) 0 ∍ r ∧ R(Z) ∍ s , t

0(r) * (s(u)+ t(v))
:=[(Def1) ∧ (Def2)] r * 0 * (s + u * 0 + t + v * 0)
=[(9) g R(alt)] r * 0 * (s + u * 0) + r * 0 * (t + v * 0)
=:[(Def1) ∧ (Def2)]
0(r) * s(0(u) + 0(r) * t(v)

d) 0 ∍ r, s ∧ ∞ ∍ t

0(r) * (0(s) + ∞(t))
:=[(Def1) ∧ (Def3)] r * 0 * (s * 0 + t * ∞)
=[(9) g R(alt)] r * 0 * s * 0 + r * 0 * t * ∞
=:[(Def1) ∧ (Def3)]
0(r) * 0(s) + 0(r) * ∞(t)

e) 0 ∍ r ∧ ∞ ∍ s, t
0(r) * (∞(s) + ∞(t))
:=[(Def1) ∧ (Def3)] r * 0 * (s * ∞ + t * ∞)
=[(9) g R(alt)] r * 0 * s * ∞ + r * 0 * t * ∞
[(Def1) ∧ (Def3)]
0(r) * ∞(s) + 0(r) * ∞(t)

f) 0 ∋ r ∧ R(Z) ∋ s ∧ ∞ ∋ t

0(r) * (s(u) + ∞(t))
:=[(Def1) ∧ (Def2) ∧ (Def3)] r * 0 * ((s + u * 0) + t * ∞)
=[(9) g R(alt)] r * 0 * (s + u * 0) + r * 0 * t * ∞
[(Def1) ∧ (Def2) ∧ (Def3)]
0(r) *s(u)+ 0(r) * ∞(t)

g) R(Z) ∋ r , s , t

r(u) * (s(v)+t(w))
:=[(Def2)] (r + u * 0) * (s + v * 0 + t + w * 0)
=[(6) g R(alt)] (r + u * 0) * (s + v * 0) + (r + u * 0) * (t + w * 0)
=:[(Def2)]
r(0(u) * s(0(v) + r(0(u) *t(w)

h) R(Z) ∋ r, s ∧ 0 ∋ t

r(u) * (s(v) + 0(t))
:=[(Def1) ∧ (Def2)] (r + u * 0) * (s + v * 0 + t * 0)
=[(6) g R(alt)] (r + u * 0) * (s + v * 0) + (r + u * 0) * (t * 0)
=:[(Def1) ∧ (Def2)]
r(u) *s(v)+r(u)* 0(t)

i) R(Z) ∋ r ∧ 0 ∋ s, t

r(u) * (0(s) + 0(t))
:=[(Def1) ∧ (Def2)] (r + u * 0) * (s * 0 + t * 0)
=[(6) g R(alt)] (r + u * 0) * (s * 0) + (r + u * 0) * (t * 0)
=:[(Def1) ∧ (Def2)]
r(u) * 0(s) +r(u)* 0(t)

j) R(Z) ∋ r ∧ 0 ∋ s ∧ ∞ ∋ t

r(u) * (0(s) + ∞(t))
:=[(Def1) ∧ (Def2) ∧ (Def3)] (r + u * 0) * (s * 0 + t * ∞)
=[(6) g R(alt)] (r + u * 0) * (s * 0) + (r + u * 0) * (t * ∞)
=:[(Def1) ∧ (Def2) ∧ (Def3)]
r(u) * 0(s) +r(u)* ∞(t)

k) R(Z) ∋ r, s ∧ ∞ ∋ t

r(u) * (s(v)+ ∞(t))
:=[(Def2) ∧ (Def3)] (r + u * 0) * (s + v * 0 + t * ∞)
=[(9) g R(alt)] (r + u * 0) * (s + v * 0) + (r + u * 0) * t * ∞
=:[(Def2) ∧ (Def3)]
r(u) *s(v)+r(u)* ∞(t)

l) R(Z) ϶ r ∧ ∞ ϶ s , t

r(u) * (∞(s) + ∞(t))
:=[(Def2) ∧ (Def3)] (r + u * 0) * (s * ∞ + t * ∞)
[(9) g R(alt)] (r + u * 0) * s * ∞ + (r + u * 0) * t * ∞
=:[(Def2) ∧ (Def3)]
r(u) * ∞(s) +r(u)* ∞(t)

m) ∞ ϶ r, s, t

∞(r) * (∞(s) + ∞(t))
:=[(Def3)] r * ∞ * (s * ∞ + t * ∞)
=[(9) g R(alt)] r * ∞ * s * ∞ + r * ∞ * t * ∞
=:[(Def3)]
∞(r) * ∞(s) + ∞(r) * ∞(t)

n) ∞ ϶ r, s ∧ 0 ϶ t

∞(r) * (∞(s) + 0(t))
:=[(Def1) ∧ (Def3)] r * ∞ * (s * ∞ + t * 0)
=[(9) g R(alt)] r * ∞ * s * ∞ + r * ∞ * t * 0
=:[(Def1) ∧ (Def3)]
∞(r) * ∞(s) + ∞(r) * 0(t)

o) ∞ ϶ r ∧ 0 ϶ s, t

∞(r) * (0(s) + 0(t))
:=[(Def1) ∧ (Def3)] r * ∞ * (s * 0 + t * 0)
=[(9) g R(alt)] r * ∞ * s * 0 + r * ∞ * t * 0
=:[(Def1) ∧ (Def3)]
∞(r) * 0(s) + ∞(r) * 0(t)

p) ∞ ϶ r ∧ R(Z) ϶ s ∧ 0 ϶ t

∞(r) * (s(u)+ 0(t))
:=[(Def1) ∧ (Def2) ∧ (Def3)] r * ∞ * ((s + u * 0) + t * 0)
=[(9) g R(alt)] r * ∞ * (s + u * 0) + r * ∞ * t * 0
=:[(Def1) ∧ (Def2) ∧ (Def3)]
∞(r) *s(u)+ ∞(r) * 0(t)

q) ∞ ϶ r ∧ R(Z) ϶ s, t

∞(r) * (s(u)+ t(v))
:=[(Def2) ∧ (Def3)] r * ∞ * ((s + u * 0) + (t + v * 0))
=[(9) g R(alt)] r * ∞ * (s + u * 0) + r * ∞ * (t + v * 0)
=:[(Def2) ∧ (Def3)]
∞(r) *s(u)+ ∞(r) * 0(t)

r) ∞ ∍ r, s ∧ R(z) ∍ t

∞(r) * (∞(s) + t(v))
:=[(Def2) ∧ (Def3)] r * ∞ * (s * ∞ + (t + v * 0))
=[(9) g R(alt)] r * ∞ * s * ∞ + r * ∞ * (t + v * 0)
=:[(Def2) ∧ (Def3)]
∞(r) * ∞(s) + ∞(r) * 0(t)

Zusatz: (1) g R(neu) ⇒ (s + t) = (t + s) ⇒ s) – ä) erfüllt

Zwischenergebnis: (9) g R(neu)

(10): r = e(+) ∨ R(+) ∍ r ∨ R(+) ∍ -r

a) 0 ∍ r

r > 0
:⇔[(Def13)] 0(+) ∍ 0(r)
⇒[(Def16] R(+) ∍ 0(r)

r < 0
⇔[*(-1)] -r > 0
:⇔[(Def13)] 0(+) ∍ 0(-r)
⇒[(Def16)] R(+) ∍ 0(-r)

r = 0
:⇔[(Def1)] 0(r) = 0 * 0
=:[(Def4)] e(+)

b) R(Z) ∍ r

r > 0
:⇔[(Def14)] R(Z+) ∍ r(s)
⇒[(Def16] R(+) ∍ r(s)

r < 0
⇔[*(-1)] -r > 0
:⇔[(Def14)] R(Z+) ∍ -r(0(-s))
⇒[(Def16)] R(+) ∍ -r(0(-s))

c) ∞ ∍ r

r > 0
:⇔[(Def15)] ∞(+) ∍ ∞(r)
⇒[(Def16] R(+) ∍ ∞(r)

r < 0
⇔[*(-1)] -r > 0
:⇔[(Def15)] ∞(+) ∍ ∞(-r)
⇒[(Def16)] R(+) ∍ ∞(-r)

Zwischenergebnis: (10) g R(neu)

(11): R(+) ∍ r , s ⇒ R(+) ∍ t := r + s

a) 0(+) ∍ r , s

0(r) + 0(s)
:=[(Def1)] r * 0 + s * 0
=[(9) g R(alt)] (r + s) * 0
=[(10) g R(alt) ∧ (Def13)]
R(+) ∍:

b) 0(+) ∍ r ∧ R(Z+) ∍ s

0(r) + s(t)
:=[(Def1) ∧ (Def2)] r * 0 + s + t * 0
=[(1) g R(alt)] s + r * 0 + t * 0
=[(9) g R(alt)] s + (r + t) * 0
=:[(Def2)]
s(0(r + t))
[(11) g R(alt) ∧ (Def14)]
R(+) ∍:

c) 0(+) ∍ r ∧ ∞(+) ∍ s

0(r) + ∞(s)
:=[(Def1) ∧ (Def3)] r * 0 + s * ∞
=:[(Def12)]
s * ∞
[(Def15)]
R(+) ∍:

d) R(Z) ∍ r , s

r(t) + s(u)
:=[(Def2)] r + t * 0 + s + u * 0
=[(1) g R(alt)] (r + s) + t * 0 + u * 0
=[(9) g R(alt)] (r + s) + (t + u) * 0
=:[(Def2)]
(r + s)(0(t + u))
[(11) g R(alt) ∧ (Def14)]
R(+) ∍:

e) R(Z+) ϶ r ∧ ∞(+) ϶ s

r(t) + ∞(s)
:=[(Def2) ∧ (Def3)] r + t * 0 + s * ∞
=:[(Def12)] s * ∞
[(Def15)]
R(+) ϶:

f) ∞(+) ϶ r , s

∞(r) + ∞(s)
:=[(Def3)] r * ∞ + s * ∞
=[(9) g R(alt)] (r + s) * ∞
=:[(Def3)] ∞ (r + s)
[(11) g R(alt) ∧ (Def15)]
R(+) ϶:

Zwischenergebnis: (11) g R(neu)

(12): (R(+) \ (0(+) ∪ ∞(+))) ϶ r , s ⇒ (R(+) \ (0(+)∪ ∞(+))) ϶ t := r * s

a) R(Z+) ϶ r , s

r * s
r(t) * s(u)
:=[(Def2)] (r + t * 0) * (s + u * 0)
=[(9) g R(alt)] r * (s + u * 0) + (t * 0) * (s + u * 0)
=[(9) g R(alt)] r * s + r * u * 0 + t * 0 * s + t * 0 * u *0
=:[(Def7)] r * s + r * u * 0 + t * 0 * s + 0 * 0
=[(3) g R(alt)] r * s + r * u * 0 + t * 0 * s
=[(5) g R(alt)] r * s + r * u * 0 + t * s * 0
=[(9) g R(alt)] r * s + ((r * u) + (t * s)) * 0
=:[(Def2)] (r * s)(0(r * u + t * s))
[(11), (12) g R(alt+) ∧ (Def14) ∧ (Def16)]
R(+) ϶:

b) 0 ϶ r ∧ R(Z+) ϶ s

r * s
r(t) * 0(s)
:=[(Def2)] (r + t * 0) * (s * 0)
=[(9) g R(alt)] r * (s * 0) + (t * 0) * (s * 0)
=[(9) g R(alt)] r * s * 0 + t * 0 * s * 0
=[(3) g R(alt)] r * s * 0 + 0 * 0
=[(5) g R(alt)] r * s * 0

[(11), (12) g R(alt+) ∧ (Def14) ∧ (Def16)]
R(+) ∍:

c) R(Z+) ∍ r ∧ 0 ∍ s

(1) g R(neu)
⇔[(b)] (12) g R(Z+) ∍ r ∧ 0 ∍ s

d) 0 ∍ r, s
(12) g nicht 0 ⇔[(0 * 0 =: 0)] (12) g nicht 0^2

Zwischenergebnis: (12) g (R(neu+)\ (0(+) ∪ ∞(+)))

(13): M ⊂ R(neu), m(max.) >= m

a) M ⊂ 0

r > s
:⇔[(Def13)] r * 0(1) > s * 0(1)
:⇔[(Def1)]
0(r) > 0(s)

b) M ⊂ R(Z)

r > s
:⇔[(Def13)] r + t * 0 > s + u * 0
:⇔[(Def2)]
r(t) > s(u)

r > s
:⇔[(Def13)] t + r * 0 > t + s * 0
:⇔[(Def2)]
t(r) > t(s)

c) M ⊂ ∞

r > s
:⇔[(Def13)] r * ∞(1) > s * ∞(1)
:⇔[(Def3)]
∞(r) > ∞(s)

Zwischenergebnis: (13) g R(neu)

01 : 01 = 1
0(r) : 0(r) = (r * 0) : (r * 0) = (r : r) * (01 : 01) = 1
0(r) : 0(s) = (r * 0) : (s * 0) = (r : s) * (01 : 01) = r : s = t

∞1 : ∞1 = 1
∞(r) : ∞(r) = (r * ∞) : (r * ∞) = (r : r) * (∞1 : ∞1) = 1
∞(r) : ∞(s) = (r * ∞) : (s * ∞) = (r : s) * (∞1 : ∞1) = r : s = t

q.e.d.

™

Beweis 1.2: Das dritte Axiom der reellen Zahlen kann aus der Reflexivität des Gleichzeichens und der Definition der reellen Zahlen abgeleitet werden.

Annahme: Es existiert eine Menge R(neu), so daß die Aussage des dritten Axioms die gleiche ist wie die der Reflexivität des Gleichzeichens.

(1) (r)(s) = (s)(r)

a) R(Z)
+r +s = +s +r
-r –s = -s -r
+r –s = -s +r
-r +s = +s -r
b) 0
+r = +r
-r = -r
+s = +s
-s = -s
=

Zwischenergebnis: (1) g R(neu)

(2) [(r)(s)](t) = (r)[(s)(t)]

a) R(Z)
(+r +s) +t = +r (+s +t)
(+r +s) –t = +r (+s –t)
(+r –s) +t = +r (-s +t)
(-r +s) +t = +r (+s –t)
(+r –s) –t = +r (-s –t)
(-r +s) –t = +r (+s –t)
(-r –s) +t = -r (-s +t)
(-r –s) –t = -r (-s –t)

b) 0
(+r +s) = +r (+s)
(+r –s) = +r (-s)
(-r +s) = -r (+s)
(-r –s) = -r (-s)
(+r) +t = +r (+t)
(+r) –t = +r (-t)
(-r) +t = -r (+t)
(-r) –t = -r (-t)
(+s) +t = (+s +t)
(+s) –t = (+s -t)
(-s) +t = (-s +t)
(-s) –t = (-s -t)
(+r) = +r

(-r) = -r
(+s) = (+r)
(-s) = (-r)
+t = (+t)
-t = (-t)
 =

Zwischenergebnis: (2) g R(neu)

(3) (r) = (r)

+r = +r
-r = -r
 =

Zwischenergebnis: (3) g R(neu)

(4) +r −r =

+r −r =
+r −r +r = +r
+r = +r

Zwischenergebnis: (4) g R(neu)

(5) (r)*(s) = (s)*(r)

+r * +s = +s * +r
+r * (-s) = (-s) * +r
(-r) * +s = +s * (-r)
(-r) * (-s) = (-s) * (-r)
+r * = * +r
* +s = +s *
* = *

Zwischenergebnis: (5) g R(neu)

(6) [(r)*(s)]*(t) = (r)*[(s)*(t)]

a) R(Z)

(+r * +s) * +t = +r * (+s * +t)
(-r * +s) * +t = -r * (+s * +t)
(+r * -s) * +t = +r * (-s * +t)
(+r * +s) * -t = +r * (+s * -t)

(-r * -s) * +t = -r * (-s * +t)
(-r * +s) * -t = -r * (+s * -t)
(+r * -s) * -t = +r * (-s * -t)
(-r * -s) * -t = -r * (-s * -t)

b) 0
(+r *) * +t = +r * (* +t)
(+r *) * -t = +r * (* -t)
(-r *) * +t = -r * (* +t)
(-r *) * -t = -r * (* -t)
(+r * -s) * = +r * (-s *)
(+r * +s) * = +r * (+s *)
(-r * +s) * = -r * (+s *)
(-r * -s) * = -r * (-s *)
(* +s) * +t = * (-s * +t)
(* +s) * -t = * (+s * -t)
(* -s) * +t = * (-s * -t)
(* -s) * -t = * (-s * -t)

Beweis 1.3: Beweisverfahren

Annahme:
Man kann die reellen Zahlen so erweitern, daß die vorher gültigen Axiome auch für die erweiterte Menge gelten.

Definitionen:
X (x)
Def Defx
A Allgemeiner Term
B Allgemeine Gleichung

A(neu)
:=[(Defx) g A(neu)]
A(alt)
=[(x) g A(alt)]
A(alt‘)
=:[(Defx) g A(alt)]
A(neu‘)

A(neu) = A(neu‘)
⇔ (x) g A(neu)

(x) g R(alt)
⇒

(x) g R(neu)
R E r(alt)

R(neu) =: r(alt)
Bsp. 0 = 0(1), 0(2)
(x) g R(alt)
(x) g R(neu)

(x) g R(alt)
(x) g r
(x) g r(s)
(x) g r(s , t)

(x) g R(alt)

Gleichung A und Gleichung B
A
:⇔[(x) g R(alt)]
B

A = A(alt)
B = A(alt)

Nur bei f(x) <> g(x) (0(1) <> 0(r)):
A
:⇔ [(Defx) g R(neu)]
B

A = A(neu)
B = A(alt)
A = A(alt)
B = A(neu)
(Defx) g R(neu)
Gleichung A(neu) in Gleichung A(alt) umwandeln

Wenn r * 0 Element R(alt) einbeziehen

Beweis 1: Die perfekten Zahlenmengen

Einheitlichkeit der Axiome

Existenz des Unendlichen

Dementsprechend existiert Unendlich nicht nur als Grenzwert, sondern auch wirklich.

Die reellen Zahlen können so erweitert werden, daß alle Axiome einheitlich gelten.

Annahme: Es existiert eine Menge R(neu), so daß alle 13 Axiome (1 - 13) der reellen Zahlen einheitlich für R(neu) gelten und R (alt) $\subseteq$ R(neu) ist.

Alternativer Beweis zu 1.1 nur mit Definitionen:
0(r) + 0(s) := 0(r + s)
0(r) * 0(s) := 0(0)
0(r) + s(t) := s(t + r)
0(r) * s(t) := 0(r * s)
0(r) + ∞(s) := ∞(s)
0(r) * ∞(s) := r * s(0)
r(t) + s(v) := [r + s](t + v)
r(t) * s(v) := [r * s](r * v + s * t)
∞(r) + s(t) := ∞(r)
∞(r) * s(t) := ∞(r * s)

alte Zahl und neue null Axiome beweisen für 0 und R(Z)